Problemas de espacio nulo, nulidad, imagen de una matriz, espacio de los renglones y columnas

por Felipe Pinzón

Sea $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcular el espacio nulo, mulidad, imagen de A, espacio de los renglones y espacio de las columnas.

Dan: Matriz $A_{2x3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Piden:

- Espacio nulo N_A
- Nulidad $v(A)$
- Imagen A
- Rango de A $\rho(A)$
- Espacio de los renglones R_A
- Espacio de las columnas C_A

Plan:

- Encontrar una base para A por medio de la reduccion de renglones.
- Según la cantidad de elementos que generan, determinaremos su dimension.
- Encontrar si cada columna contiene vectores linealmente independientes.

Ejecución:

$A\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$x + z = 0$

$y - z = 0 \quad \begin{matrix} x = -z \\ y = z \\ z = t \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$ asi $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es base

- $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $v(A) = \dim N_A = 1$
- Imagen $A = C_A$

  Las dos columnas de A son vectores linealmente independientes en R^2, por lo tanto forman una base para R^2. Se toman 2 vectores, ya que es el numero necesario para R^2, 3 vectores sobran.

  Imagen $A = C_A\, R^2$
- $\rho(A) = \dim \text{imagen}\, A = \dim R^2 = 2$
- $R_A = \text{gen}\{(1,2,-1),(2,-1,3)\} \rightarrow$ Son linealmente independientes

  R_A es subespacio de dimension 2 de R^3.

Tomado del libro Grossman E. Algebra Lineal. 5^a. Edición. Editorial McGraw-Hill. México